Taylor-tétel Csebisev-rendszerekkel

Páles Zsolt

Debreceni Egyetem, Matematikai Intézet

Analízis és Alkalmazásai Workshop

Visegrád, Október 17–18, 2024

Az alábbiakban jelöljön $I \subseteq \mathbb{R}$ egy nemdegenerált intervallumot és legyen n egy természetes szám.

A Newton–Leibniz formula

Legyen $f : I \to \mathbb{R}^n$ folytonosan differenciálható. Ekkor minden $a, x \in I$ esetén

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt.$$

Következmény

Legyen $f : I \to \mathbb{R}^n$ folytonosan differenciálható. Ekkor minden $a, x \in I$ esetén

$$\|f(x) - f(a)\| \leq \|f'\|_\infty |x - a|.$$

Az alábbiakban jelöljön $I \subseteq \mathbb{R}$ egy nemdegenerált intervallumot és legyen n egy természetes szám.

A Newton–Leibniz formula

Legyen $f : I \to \mathbb{R}^n$ folytonosan differenciálható. Ekkor minden $a, x \in I$ esetén

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt.$$

Következmény

Legyen $f : I \to \mathbb{R}^n$ folytonosan differenciálható. Ekkor minden $a, x \in I$ esetén

$$\|f(x) - f(a)\| \leq \|f'\|_\infty |x - a|.$$

Az alábbiakban jelöljön $I \subseteq \mathbb{R}$ egy nemdegenerált intervallumot és legyen n egy természetes szám.

A Newton–Leibniz formula

Legyen $f : I \to \mathbb{R}^n$ folytonosan differenciálható. Ekkor minden $a, x \in I$ esetén

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt.$$

Következmény

Legyen $f : I \to \mathbb{R}^n$ folytonosan differenciálható. Ekkor minden $a, x \in I$ esetén

$$\|f(x) - f(a)\| \leq \|f'\|_\infty |x - a|.$$

A Taylor-tétel integrálos maradék taggal

Legyen $f : I \to \mathbb{R}^n$ n-szer folytonosan differenciálható. Ekkor minden $a, x \in I$ esetén

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n-1} f^{(i)}(a)\frac{(x-a)^i}{i!} + \int_a^x f^{(n)}(t)\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}dt$$

Következmény

Legyen $f : I \to \mathbb{R}^n$ n-szer folytonosan differenciálható. Ekkor minden $a, x \in I$ esetén

$$\left\| f(x) - \sum_{i=0}^{n-1} f^{(i)}(a)\frac{(x-a)^i}{i!} \right\| \leq \|f^{(n)}\|_\infty \frac{|x-a|^n}{n!}.$$

A Taylor-tétel integrálos maradék taggal

Legyen $f : I \to \mathbb{R}^n$ n-szer folytonosan differenciálható. Ekkor minden $a, x \in I$ esetén

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n-1} f^{(i)}(a)\frac{(x-a)^i}{i!} + \int_a^x f^{(n)}(t)\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}dt$$

Következmény

Legyen $f : I \to \mathbb{R}^n$ n-szer folytonosan differenciálható. Ekkor minden $a, x \in I$ esetén

$$\left\| f(x) - \sum_{i=0}^{n-1} f^{(i)}(a)\frac{(x-a)^i}{i!} \right\| \leq \|f^{(n)}\|_\infty \frac{|x-a|^n}{n!}.$$

Az előadás fő célkitűzése elegendően sima függvények Csebisev-rendszerekkel való interpolációjához tartozó pontos hibatag megtalálása. Ebben az alábbi eredmény kulcs szerepet játszik.

1. Tétel

Legyen $A : I \to \mathbb{R}^{n\times n}$ egy folytonos mátrix-értékű függvény. Tegyük fel, hogy $Y : I \to \mathbb{R}^{n\times n}$ egy olyan mátrix-értékű megoldása az

$$Y' = AY$$

lineáris homogén differenciál egyenletnek, hogy $Y(x)$ nemszinguláris minden $x \in I$ esetén. Ekkor minden folytonosan differenciálható $f : I \to \mathbb{R}^n$ függvényre és minden $a, x \in I$-re

$$f(x) = Y(x)\left(Y^{-1}(a)f(a) + \int_a^x Y^{-1}(f' - Af)\right).$$

Az előadás fő célkitűzése elegendően sima függvények Csebisev-rendszerekkel való interpolációjához tartozó pontos hibatag megtalálása. Ebben az alábbi eredmény kulcs szerepet játszik.

1. Tétel

Legyen $A : I \to \mathbb{R}^{n\times n}$ egy folytonos mátrix-értékű függvény. Tegyük fel, hogy $Y : I \to \mathbb{R}^{n\times n}$ egy olyan mátrix-értékű megoldása az

$$Y' = AY$$

lineáris homogén differenciál egyenletnek, hogy $Y(x)$ nemszinguláris minden $x \in I$ esetén. Ekkor minden folytonosan differenciálható $f : I \to \mathbb{R}^n$ függvényre és minden $a, x \in I$-re

$$f(x) = Y(x)\left(Y^{-1}(a)f(a) + \int_a^x Y^{-1}(f' - Af)\right).$$

Az előadás fő célkitűzése elegendően sima függvények Csebisev-rendszerekkel való interpolációjához tartozó pontos hibatag megtalálása. Ebben az alábbi eredmény kulcs szerepet játszik.

1. Tétel

Legyen $A : I \to \mathbb{R}^{n\times n}$ egy folytonos mátrix-értékű függvény. Tegyük fel, hogy $Y : I \to \mathbb{R}^{n\times n}$ egy olyan mátrix-értékű megoldása az

$$Y' = AY$$

lineáris homogén differenciál egyenletnek, hogy $Y(x)$ nemszinguláris minden $x \in I$ esetén. Ekkor minden folytonosan differenciálható $f : I \to \mathbb{R}^n$ függvényre és minden $a, x \in I$-re

$$f(x) = Y(x)\left(Y^{-1}(a)f(a) + \int_a^x Y^{-1}(f' - Af)\right).$$

Bizonyítás.

A bizonyítandó összefüggés azzal ekvivalens, hogy

$$\int_a^x (Y^{-1}f)' = Y^{-1}(x)f(x) - Y^{-1}(a)f(a) = \int_a^x Y^{-1}(f' - Af).$$

Ezért elegendő megmutatnunk, hogy

$$(Y^{-1}f)' = Y^{-1}(f' - Af).$$

Vegyük észre, hogy

$$\begin{aligned} I_{n\times n} = Y^{-1}Y \quad &\Rightarrow \quad 0_{n\times n} = (Y^{-1}Y)' = (Y^{-1})'Y + Y^{-1}Y' \\ &\Rightarrow \quad (Y^{-1})' = -Y^{-1}Y'Y^{-1} = -Y^{-1}AYY^{-1} = -Y^{-1}A. \end{aligned}$$

Ezért

$$(Y^{-1}f)' = (Y^{-1})'f + Y^{-1}f' = -Y^{-1}Af + Y^{-1}f' = Y^{-1}(f' - Af).$$

Bizonyítás.

A bizonyítandó összefüggés azzal ekvivalens, hogy

$$\int_a^x \big(Y^{-1}f\big)' = Y^{-1}(x)f(x) - Y^{-1}(a)f(a) = \int_a^x Y^{-1}(f' - Af).$$

Ezért elegendő megmutatnunk, hogy

$$\big(Y^{-1}f\big)' = Y^{-1}(f' - Af).$$

Vegyük észre, hogy

$$\begin{aligned} I_{n\times n} = Y^{-1}Y \quad &\Rightarrow \quad 0_{n\times n} = \big(Y^{-1}Y\big)' = \big(Y^{-1}\big)'Y + Y^{-1}Y' \\ &\Rightarrow \quad \big(Y^{-1}\big)' = -Y^{-1}Y'Y^{-1} = -Y^{-1}AYY^{-1} = -Y^{-1}A. \end{aligned}$$

Ezért

$$\big(Y^{-1}f\big)' = \big(Y^{-1}\big)'f + Y^{-1}f' = -Y^{-1}Af + Y^{-1}f' = Y^{-1}(f' - Af).$$

Bizonyítás.

A bizonyítandó összefüggés azzal ekvivalens, hogy

$$\int_a^x \left(Y^{-1}f\right)' = Y^{-1}(x)f(x) - Y^{-1}(a)f(a) = \int_a^x Y^{-1}(f' - Af).$$

Ezért elegendő megmutatnunk, hogy

$$\left(Y^{-1}f\right)' = Y^{-1}(f' - Af).$$

Vegyük észre, hogy

$$I_{n\times n} = Y^{-1}Y \quad \Rightarrow \quad 0_{n\times n} = \left(Y^{-1}Y\right)' = \left(Y^{-1}\right)'Y + Y^{-1}Y'$$
$$\Rightarrow \quad \left(Y^{-1}\right)' = -Y^{-1}Y'Y^{-1} = -Y^{-1}AYY^{-1} = -Y^{-1}A.$$

Ezért

$$\left(Y^{-1}f\right)' = \left(Y^{-1}\right)'f + Y^{-1}f' = -Y^{-1}Af + Y^{-1}f' = Y^{-1}(f' - Af).$$

Bizonyítás.

A bizonyítandó összefüggés azzal ekvivalens, hogy

$$\int_a^x \left(Y^{-1}f\right)' = Y^{-1}(x)f(x) - Y^{-1}(a)f(a) = \int_a^x Y^{-1}(f' - Af).$$

Ezért elegendő megmutatnunk, hogy

$$\left(Y^{-1}f\right)' = Y^{-1}(f' - Af).$$

Vegyük észre, hogy

$$\begin{aligned} I_{n\times n} = Y^{-1}Y \quad &\Rightarrow \quad 0_{n\times n} = \left(Y^{-1}Y\right)' = \left(Y^{-1}\right)'Y + Y^{-1}Y' \\ &\Rightarrow \quad \left(Y^{-1}\right)' = -Y^{-1}Y'Y^{-1} = -Y^{-1}AYY^{-1} = -Y^{-1}A. \end{aligned}$$

Ezért

$$\left(Y^{-1}f\right)' = \left(Y^{-1}\right)'f + Y^{-1}f' = -Y^{-1}Af + Y^{-1}f' = Y^{-1}(f' - Af).$$

Következmény

Legyen $A : I \to \mathbb{R}^{n\times n}$ be a folytonos mátrix-értékű függvény. Tegyük fel, hogy $Y : I \to \mathbb{R}^{n\times n}$ egy olyan mátrix-értékű megoldása az

$$Y' = AY$$

lineáris homogén differenciál egyenletnek, hogy $Y(x)$ nemszinguláris minden $x \in I$ esetén. Ekkor minden folytonosan differenciálható $f : I \to \mathbb{R}^n$ és minden $a \in I$ esetén létezik egy olyan $y : I \to \mathbb{R}^n$ megoldása az $y' = Ay$ differenciál egyenletnek, hogy $x \in I$-re

$$\|f(x) - y(x)\| \leq \|Y(x)\| \left| \int_a^x \|Y^{-1}\| \right| \|f' - Af\|_\infty .$$

Következmény

Legyen $A : I \to \mathbb{R}^{n\times n}$ be a folytonos mátrix-értékű függvény. Tegyük fel, hogy $Y : I \to \mathbb{R}^{n\times n}$ egy olyan mátrix-értékű megoldása az

$$Y' = AY$$

lineáris homogén differenciál egyenletnek, hogy $Y(x)$ nemszinguláris minden $x \in I$ esetén. Ekkor minden folytonosan differenciálható $f : I \to \mathbb{R}^n$ és minden $a \in I$ esetén létezik egy olyan $y : I \to \mathbb{R}^n$ megoldása az $y' = Ay$ differenciál egyenletnek, hogy $x \in I$-re

$$\|f(x) - y(x)\| \leq \|Y(x)\| \left| \int_a^x \|Y^{-1}\| \right| \|f' - Af\|_\infty.$$

Bizonyítás.

Definiáljuk az $y : I \to \mathbb{R}^n$ függvényt az $y := Y \cdot Y^{-1}(a)f(a)$ képlettel.
Vegyük észre, hogy

$$y' = Y' \cdot Y^{-1}(a)f(a) = (AY) \cdot Y^{-1}(a)f(a) = Ay,$$
$$y(a) = Y(a) \cdot Y^{-1}(a)f(a) = f(a).$$

Az 1. tétel szerint minden $x \in I$ esetén

$$f(x) - y(x) = Y(x)\left(Y^{-1}(a)f(a) + \int_a^x Y^{-1}(f' - Af)\right) - Y(x) \cdot Y^{-1}(a)f(a)$$
$$= Y(x) \int_a^x Y^{-1}(f' - Af).$$

Ezért

$$\|f(x) - y(x)\| = \left\| Y(x) \int_a^x Y^{-1}(f' - Af) \right\| \le \|Y(x)\| \left| \int_a^x \|Y^{-1}\| \right| \|f' - Af\|_\infty.$$

Bizonyítás.

Definiáljuk az $y : I \to \mathbb{R}^n$ függvényt az $y := Y \cdot Y^{-1}(a)f(a)$ képlettel. Vegyük észre, hogy

$$y' = Y' \cdot Y^{-1}(a)f(a) = (AY) \cdot Y^{-1}(a)f(a) = Ay,$$
$$y(a) = Y(a) \cdot Y^{-1}(a)f(a) = f(a).$$

Az 1. tétel szerint minden $x \in I$ esetén

$$f(x) - y(x) = Y(x)\left(Y^{-1}(a)f(a) + \int_a^x Y^{-1}(f' - Af)\right) - Y(x) \cdot Y^{-1}(a)f(a)$$
$$= Y(x) \int_a^x Y^{-1}(f' - Af).$$

Ezért

$$\|f(x) - y(x)\| = \left\|Y(x) \int_a^x Y^{-1}(f' - Af)\right\| \leq \|Y(x)\| \left|\int_a^x \|Y^{-1}\|\right| \|f' - Af\|_\infty.$$

Bizonyítás.

Definiáljuk az $y : I \to \mathbb{R}^n$ függvényt az $y := Y \cdot Y^{-1}(a)f(a)$ képlettel. Vegyük észre, hogy

$$y' = Y' \cdot Y^{-1}(a)f(a) = (AY) \cdot Y^{-1}(a)f(a) = Ay,$$
$$y(a) = Y(a) \cdot Y^{-1}(a)f(a) = f(a).$$

Az 1. tétel szerint minden $x \in I$ esetén

$$f(x) - y(x) = Y(x)\left(Y^{-1}(a)f(a) + \int_a^x Y^{-1}(f' - Af)\right) - Y(x) \cdot Y^{-1}(a)f(a)$$
$$= Y(x) \int_a^x Y^{-1}(f' - Af).$$

Ezért

$$\|f(x) - y(x)\| = \left\| Y(x) \int_a^x Y^{-1}(f' - Af) \right\| \leq \|Y(x)\| \left| \int_a^x \|Y^{-1}\| \right| \|f' - Af\|_\infty.$$

Bizonyítás.

Definiáljuk az $y : I \to \mathbb{R}^n$ függvényt az $y := Y \cdot Y^{-1}(a)f(a)$ képlettel. Vegyük észre, hogy

$$y' = Y' \cdot Y^{-1}(a)f(a) = (AY) \cdot Y^{-1}(a)f(a) = Ay,$$
$$y(a) = Y(a) \cdot Y^{-1}(a)f(a) = f(a).$$

Az 1. tétel szerint minden $x \in I$ esetén

$$f(x) - y(x) = Y(x)\left(Y^{-1}(a)f(a) + \int_a^x Y^{-1}(f' - Af)\right) - Y(x)\cdot Y^{-1}(a)f(a)$$
$$= Y(x) \int_a^x Y^{-1}(f' - Af).$$

Ezért

$$\|f(x) - y(x)\| = \left\|Y(x)\int_a^x Y^{-1}(f' - Af)\right\| \le \|Y(x)\| \left|\int_a^x \|Y^{-1}\|\right| \|f' - Af\|_\infty.$$

Csebisev-rendszerek

Egy $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) : I \to \mathbb{R}^n$ függvényt *n-dimenziós Csebisev-rendszernek* nevezünk, ha ω n-szer folytonosan differenciálható és

$$W_\omega(x) := \begin{vmatrix} \omega_1(x) & \omega_1'(x) & \dots & \omega_1^{(n-1)}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_n(x) & \omega_n'(x) & \dots & \omega_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (x \in I).$$

2. Tétel

Legyen $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) : I \to \mathbb{R}^n$ egy n-dimenziós Csebisev-rendszer és legyen $f : I \to \mathbb{R}$ egy n-szer folytonosan differenciálható függvény. Ekkor f pontosan akkor lineáris kombinációja az $\omega_1, \dots, \omega_n$ függvényeknek, ha minden $x \in I$ esetén

$$W_{f,\omega}(x) := \begin{vmatrix} f(x) & f'(x) & \dots & f^{(n-1)}(x) & f^{(n)}(x) \\ \omega_1(x) & \omega_1'(x) & \dots & \omega_1^{(n-1)}(x) & \omega_1^{(n)}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \omega_n(x) & \omega_n'(x) & \dots & \omega_n^{(n-1)}(x) & \omega_n^{(n)}(x) \end{vmatrix} = 0.$$

Csebisev-rendszerek

Egy $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n) : I \to \mathbb{R}^n$ függvényt *n-dimenziós Csebisev-rendszernek* nevezünk, ha ω n-szer folytonosan differenciálható és

$$W_\omega(x) := \begin{vmatrix} \omega_1(x) & \omega_1'(x) & \ldots & \omega_1^{(n-1)}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_n(x) & \omega_n'(x) & \ldots & \omega_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (x \in I).$$

2. Tétel

Legyen $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n) : I \to \mathbb{R}^n$ egy n-dimenziós Csebisev-rendszer és legyen $f : I \to \mathbb{R}$ egy n-szer folytonosan differenciálható függvény. Ekkor f pontosan akkor lineáris kombinációja az $\omega_1, \ldots, \omega_n$ függvényeknek, ha minden $x \in I$ esetén

$$W_{f,\omega}(x) := \begin{vmatrix} f(x) & f'(x) & \ldots & f^{(n-1)}(x) & f^{(n)}(x) \\ \omega_1(x) & \omega_1'(x) & \ldots & \omega_1^{(n-1)}(x) & \omega_1^{(n)}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \omega_n(x) & \omega_n'(x) & \ldots & \omega_n^{(n-1)}(x) & \omega_n^{(n)}(x) \end{vmatrix} = 0.$$

3. Tétel

Legyen $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n) : I \to \mathbb{R}^n$ egy n-dimenziós Csebisev-rendszer és legyen $f : I \to \mathbb{R}$ egy n-szer folytonosan differenciálható függvény. Ekkor minden $x, a \in I$ esetén

$$\begin{vmatrix} f(x) & f(a) & f'(a) & \ldots & f^{(n-1)}(a) \\ \omega_1(x) & \omega_1(a) & \omega_1'(a) & \ldots & \omega_1^{(n-1)}(a) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_n(x) & \omega_n(a) & \omega_n'(a) & \ldots & \omega_n^{(n-1)}(a) \end{vmatrix}$$

$$= -W_\omega(a) \int_a^x \left(\frac{W_{f,\omega}(t)}{(W_\omega(t))^2} \begin{vmatrix} \omega_1(x) & \omega_1(t) & \omega_1'(t) & \ldots & \omega_1^{(n-2)}(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_n(x) & \omega_n(t) & \omega_n'(t) & \ldots & \omega_n^{(n-2)}(t) \end{vmatrix} \right) dt.$$

3. Tétel

Legyen $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n) : I \to \mathbb{R}^n$ egy n-dimenziós Csebisev-rendszer és legyen $f : I \to \mathbb{R}$ egy n-szer folytonosan differenciálható függvény. Ekkor minden $x, a \in I$ esetén

$$\begin{vmatrix} f(x) & f(a) & f'(a) & \ldots & f^{(n-1)}(a) \\ \omega_1(x) & \omega_1(a) & \omega_1'(a) & \ldots & \omega_1^{(n-1)}(a) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_n(x) & \omega_n(a) & \omega_n'(a) & \ldots & \omega_n^{(n-1)}(a) \end{vmatrix}$$

$$= -W_\omega(a) \int_a^x \left(\frac{W_{f,\omega}(t)}{(W_\omega(t))^2} \begin{vmatrix} \omega_1(x) & \omega_1(t) & \omega_1'(t) & \ldots & \omega_1^{(n-2)}(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_n(x) & \omega_n(t) & \omega_n'(t) & \ldots & \omega_n^{(n-2)}(t) \end{vmatrix} \right) dt.$$

A polinomiális eset

Legyen $a \in I$ rögzített és $x \in I$ esetén legyen

$$\omega_1(x) := 1, \qquad \omega_2(x) := x - a, \qquad \dots, \qquad \omega_n(x) := \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Ekkor

$$W_\omega(x) = \begin{vmatrix} \omega_1(x) & \dots & \omega_1^{(n-1)}(x) \\ \omega_2(x) & \dots & \omega_2^{(n-1)}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_n(x) & \dots & \omega_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ x-a & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} & \frac{(x-a)^{n-2}}{(n-2)!} & \dots & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$W_{f,\omega}(x) = \begin{vmatrix} f(x) & f'(x) & \dots & f^{(n-1)}(x) & f^{(n)}(x) \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x-a & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} & \frac{(x-a)^{n-2}}{(n-2)!} & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^n f^{(n)}(x).$$

A polinomiális eset

Legyen $a \in I$ rögzített és $x \in I$ esetén legyen

$$\omega_1(x) := 1, \qquad \omega_2(x) := x - a, \qquad \dots, \qquad \omega_n(x) := \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Ekkor

$$W_\omega(x) = \begin{vmatrix} \omega_1(x) & \dots & \omega_1^{(n-1)}(x) \\ \omega_2(x) & \dots & \omega_2^{(n-1)}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_n(x) & \dots & \omega_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ x-a & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} & \frac{(x-a)^{n-2}}{(n-2)!} & \dots & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$W_{f,\omega}(x) = \begin{vmatrix} f(x) & f'(x) & \dots & f^{(n-1)}(x) & f^{(n)}(x) \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x-a & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} & \frac{(x-a)^{n-2}}{(n-2)!} & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^n f^{(n)}(x).$$

A polinomiális eset

Legyen $a \in I$ rögzített és $x \in I$ esetén legyen

$$\omega_1(x) := 1, \qquad \omega_2(x) := x - a, \qquad \dots, \qquad \omega_n(x) := \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Ekkor

$$W_\omega(x) = \begin{vmatrix} \omega_1(x) & \dots & \omega_1^{(n-1)}(x) \\ \omega_2(x) & \dots & \omega_2^{(n-1)}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_n(x) & \dots & \omega_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ x-a & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} & \frac{(x-a)^{n-2}}{(n-2)!} & \dots & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$W_{f,\omega}(x) = \begin{vmatrix} f(x) & f'(x) & \dots & f^{(n-1)}(x) & f^{(n)}(x) \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x-a & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} & \frac{(x-a)^{n-2}}{(n-2)!} & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^n f^{(n)}(x).$$

Hasonlóan adódik, hogy

$$\begin{vmatrix} f(x) & f(a) & \dots & f^{(n-1)}(a) \\ \omega_1(x) & \omega_1(a) & \dots & \omega_1^{(n-1)}(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_n(x) & \omega_n(a) & \dots & \omega_n^{(n-1)}(a) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f(x) & f(a) & \dots & f^{(n-1)}(a) \\ 1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

$$= f(x) - \left(f(a) + f'(a)(x-a) + \dots + f^{(n-1)}(a) \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} \right),$$

és

$$\begin{vmatrix} \omega_1(x) & \omega_1(t) & \dots & \omega_1^{(n-2)}(t) \\ \omega_2(x) & \omega_2(t) & \dots & \omega_2^{(n-2)}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_n(x) & \omega_n(t) & \dots & \omega_n^{(n-2)}(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 0 \\ x-a & t-a & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} & \frac{(t-a)^{n-1}}{(n-1)!} & \dots & t-a \end{vmatrix}$$

$$= \frac{(t-x)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Hasonlóan adódik, hogy

$$\begin{vmatrix} f(x) & f(a) & \dots & f^{(n-1)}(a) \\ \omega_1(x) & \omega_1(a) & \dots & \omega_1^{(n-1)}(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_n(x) & \omega_n(a) & \dots & \omega_n^{(n-1)}(a) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f(x) & f(a) & \dots & f^{(n-1)}(a) \\ 1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

$$= f(x) - \left(f(a) + f'(a)(x-a) + \dots + f^{(n-1)}(a)\frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} \right),$$

és

$$\begin{vmatrix} \omega_1(x) & \omega_1(t) & \dots & \omega_1^{(n-2)}(t) \\ \omega_2(x) & \omega_2(t) & \dots & \omega_2^{(n-2)}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_n(x) & \omega_n(t) & \dots & \omega_n^{(n-2)}(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 0 \\ x-a & t-a & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} & \frac{(t-a)^{n-1}}{(n-1)!} & \dots & t-a \end{vmatrix}$$

$$= \frac{(t-x)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Beillesztve a kapott képleteket a 3. tétel szerinti

$$\begin{vmatrix} f(x) & f(a) & f'(a) & \dots & f^{(n-1)}(a) \\ \omega_1(x) & \omega_1(a) & \omega_1'(a) & \dots & \omega_1^{(n-1)}(a) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_n(x) & \omega_n(a) & \omega_n'(a) & \dots & \omega_n^{(n-1)}(a) \end{vmatrix}$$

$$= -W_\omega(a) \int_a^x \left(\frac{W_{f,\omega}(t)}{(W_\omega(t))^2} \begin{vmatrix} \omega_1(x) & \omega_1(t) & \omega_1'(t) & \dots & \omega_1^{(n-2)}(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_n(x) & \omega_n(t) & \omega_n'(t) & \dots & \omega_n^{(n-2)}(t) \end{vmatrix} \right) dt$$

képletbe, azt kapjuk, hogy

$$f(x) - \left(f(a) + f'(a)(x-a) + \dots + f^{(n-1)}(a)\frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} \right)$$

$$= -\int_a^x (-1)^n f^{(n)}(t)\frac{(t-x)^{n-1}}{(n-1)!}dt = \int_a^x f^{(n)}(t)\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}dt.$$

Beillesztve a kapott képleteket a 3. tétel szerinti

$$
\begin{vmatrix}
f(x) & f(a) & f'(a) & \dots & f^{(n-1)}(a) \\
\omega_1(x) & \omega_1(a) & \omega_1'(a) & \dots & \omega_1^{(n-1)}(a) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\omega_n(x) & \omega_n(a) & \omega_n'(a) & \dots & \omega_n^{(n-1)}(a)
\end{vmatrix}
$$

$$
= -W_\omega(a) \int_a^x \left(\frac{W_{f,\omega}(t)}{(W_\omega(t))^2}
\begin{vmatrix}
\omega_1(x) & \omega_1(t) & \omega_1'(t) & \dots & \omega_1^{(n-2)}(t) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\omega_n(x) & \omega_n(t) & \omega_n'(t) & \dots & \omega_n^{(n-2)}(t)
\end{vmatrix} \right) dt
$$

képletbe, azt kapjuk, hogy

$$
f(x) - \left(f(a) + f'(a)(x-a) + \dots + f^{(n-1)}(a)\frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} \right)
$$

$$
= -\int_a^x (-1)^n f^{(n)}(t)\frac{(t-x)^{n-1}}{(n-1)!}dt = \int_a^x f^{(n)}(t)\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}dt.
$$

A trigonometrikus eset

Legyen $n = 2$ és $\omega_1(x) := \cos(x), \quad \omega_2(x) := \sin(x)$, $(x \in \mathbb{R})$. Ekkor

$$W_\omega(x) = \begin{vmatrix} \omega_1(x) & \omega_1'(x) \\ \omega_2(x) & \omega_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(x) & -\sin(x) \\ \sin(x) & \cos(x) \end{vmatrix} = 1,$$

$$W_{f,\omega}(x) = \begin{vmatrix} f(x) & f'(x) & f''(x) \\ \cos(x) & -\sin(x) & -\cos(x) \\ \sin(x) & \cos(x) & -\sin(x) \end{vmatrix} = f''(x) + f(x),$$

$$\begin{vmatrix} f(x) & f(a) & f'(a) \\ \omega_1(x) & \omega_1(a) & \omega_1'(a) \\ \omega_2(x) & \omega_2(a) & \omega_2'(a) \end{vmatrix} = f(x) - \Big(f(a)\cos(x-a) + f'(a)\sin(x-a)\Big),$$

$$\begin{vmatrix} \omega_1(x) & \omega_1(t) \\ \omega_2(x) & \omega_2(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(x) & \cos(t) \\ \sin(x) & \sin(t) \end{vmatrix} = -\sin(x-t).$$

Ekkor a 3. Tétel alapján azt kapjuk, hogy

$$f(x) = f(a)\cos(x-a) + f'(a)\sin(x-a) + \int_a^x (f''(t) + f(t))\sin(x-t)dt.$$

A trigonometrikus eset

Legyen $n = 2$ és $\omega_1(x) := \cos(x)$, $\omega_2(x) := \sin(x)$, $(x \in \mathbb{R})$. Ekkor

$$W_\omega(x) = \begin{vmatrix} \omega_1(x) & \omega_1'(x) \\ \omega_2(x) & \omega_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(x) & -\sin(x) \\ \sin(x) & \cos(x) \end{vmatrix} = 1,$$

$$W_{f,\omega}(x) = \begin{vmatrix} f(x) & f'(x) & f''(x) \\ \cos(x) & -\sin(x) & -\cos(x) \\ \sin(x) & \cos(x) & -\sin(x) \end{vmatrix} = f''(x) + f(x),$$

$$\begin{vmatrix} f(x) & f(a) & f'(a) \\ \omega_1(x) & \omega_1(a) & \omega_1'(a) \\ \omega_2(x) & \omega_2(a) & \omega_2'(a) \end{vmatrix} = f(x) - \Big(f(a)\cos(x-a) + f'(a)\sin(x-a)\Big),$$

$$\begin{vmatrix} \omega_1(x) & \omega_1(t) \\ \omega_2(x) & \omega_2(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(x) & \cos(t) \\ \sin(x) & \sin(t) \end{vmatrix} = -\sin(x-t).$$

Ekkor a 3. Tétel alapján azt kapjuk, hogy

$$f(x) = f(a)\cos(x-a) + f'(a)\sin(x-a) + \int_a^x (f''(t) + f(t))\sin(x-t)dt.$$

A trigonometrikus eset

Legyen $n = 2$ és $\omega_1(x) := \cos(x)$, $\omega_2(x) := \sin(x)$, $(x \in \mathbb{R})$. Ekkor

$$W_\omega(x) = \begin{vmatrix} \omega_1(x) & \omega_1'(x) \\ \omega_2(x) & \omega_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(x) & -\sin(x) \\ \sin(x) & \cos(x) \end{vmatrix} = 1,$$

$$W_{f,\omega}(x) = \begin{vmatrix} f(x) & f'(x) & f''(x) \\ \cos(x) & -\sin(x) & -\cos(x) \\ \sin(x) & \cos(x) & -\sin(x) \end{vmatrix} = f''(x) + f(x),$$

$$\begin{vmatrix} f(x) & f(a) & f'(a) \\ \omega_1(x) & \omega_1(a) & \omega_1'(a) \\ \omega_2(x) & \omega_2(a) & \omega_2'(a) \end{vmatrix} = f(x) - \Big(f(a)\cos(x-a) + f'(a)\sin(x-a)\Big),$$

$$\begin{vmatrix} \omega_1(x) & \omega_1(t) \\ \omega_2(x) & \omega_2(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(x) & \cos(t) \\ \sin(x) & \sin(t) \end{vmatrix} = -\sin(x-t).$$

Ekkor a 3. Tétel alapján azt kapjuk, hogy

$$f(x) = f(a)\cos(x-a) + f'(a)\sin(x-a) + \int_a^x (f''(t) + f(t))\sin(x-t)dt.$$

A trigonometrikus eset

Legyen $n = 2$ és $\omega_1(x) := \cos(x), \quad \omega_2(x) := \sin(x)$, $(x \in \mathbb{R})$. Ekkor

$$W_\omega(x) = \begin{vmatrix} \omega_1(x) & \omega_1'(x) \\ \omega_2(x) & \omega_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(x) & -\sin(x) \\ \sin(x) & \cos(x) \end{vmatrix} = 1,$$

$$W_{f,\omega}(x) = \begin{vmatrix} f(x) & f'(x) & f''(x) \\ \cos(x) & -\sin(x) & -\cos(x) \\ \sin(x) & \cos(x) & -\sin(x) \end{vmatrix} = f''(x) + f(x),$$

$$\begin{vmatrix} f(x) & f(a) & f'(a) \\ \omega_1(x) & \omega_1(a) & \omega_1'(a) \\ \omega_2(x) & \omega_2(a) & \omega_2'(a) \end{vmatrix} = f(x) - \Big(f(a)\cos(x-a) + f'(a)\sin(x-a)\Big),$$

$$\begin{vmatrix} \omega_1(x) & \omega_1(t) \\ \omega_2(x) & \omega_2(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(x) & \cos(t) \\ \sin(x) & \sin(t) \end{vmatrix} = -\sin(x-t).$$

Ekkor a 3. Tétel alapján azt kapjuk, hogy

$$f(x) = f(a)\cos(x-a) + f'(a)\sin(x-a) + \int_a^x (f''(t) + f(t))\sin(x-t)dt.$$

A trigonometrikus eset

Legyen $n = 2$ és $\omega_1(x) := \cos(x), \quad \omega_2(x) := \sin(x)$, $(x \in \mathbb{R})$. Ekkor

$$W_\omega(x) = \begin{vmatrix} \omega_1(x) & \omega_1'(x) \\ \omega_2(x) & \omega_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(x) & -\sin(x) \\ \sin(x) & \cos(x) \end{vmatrix} = 1,$$

$$W_{f,\omega}(x) = \begin{vmatrix} f(x) & f'(x) & f''(x) \\ \cos(x) & -\sin(x) & -\cos(x) \\ \sin(x) & \cos(x) & -\sin(x) \end{vmatrix} = f''(x) + f(x),$$

$$\begin{vmatrix} f(x) & f(a) & f'(a) \\ \omega_1(x) & \omega_1(a) & \omega_1'(a) \\ \omega_2(x) & \omega_2(a) & \omega_2'(a) \end{vmatrix} = f(x) - \Big(f(a)\cos(x-a) + f'(a)\sin(x-a)\Big),$$

$$\begin{vmatrix} \omega_1(x) & \omega_1(t) \\ \omega_2(x) & \omega_2(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(x) & \cos(t) \\ \sin(x) & \sin(t) \end{vmatrix} = -\sin(x-t).$$

Ekkor a 3. Tétel alapján azt kapjuk, hogy

$$f(x) = f(a)\cos(x-a) + f'(a)\sin(x-a) + \int_a^x (f''(t) + f(t))\sin(x-t)dt.$$

A trigonometrikus eset

Legyen $n = 2$ és $\omega_1(x) := \cos(x), \quad \omega_2(x) := \sin(x)$, $(x \in \mathbb{R})$. Ekkor

$$W_\omega(x) = \begin{vmatrix} \omega_1(x) & \omega_1'(x) \\ \omega_2(x) & \omega_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(x) & -\sin(x) \\ \sin(x) & \cos(x) \end{vmatrix} = 1,$$

$$W_{f,\omega}(x) = \begin{vmatrix} f(x) & f'(x) & f''(x) \\ \cos(x) & -\sin(x) & -\cos(x) \\ \sin(x) & \cos(x) & -\sin(x) \end{vmatrix} = f''(x) + f(x),$$

$$\begin{vmatrix} f(x) & f(a) & f'(a) \\ \omega_1(x) & \omega_1(a) & \omega_1'(a) \\ \omega_2(x) & \omega_2(a) & \omega_2'(a) \end{vmatrix} = f(x) - \Big(f(a)\cos(x-a) + f'(a)\sin(x-a)\Big),$$

$$\begin{vmatrix} \omega_1(x) & \omega_1(t) \\ \omega_2(x) & \omega_2(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(x) & \cos(t) \\ \sin(x) & \sin(t) \end{vmatrix} = -\sin(x-t).$$

Ekkor a 3. Tétel alapján azt kapjuk, hogy

$$f(x) = f(a)\cos(x-a) + f'(a)\sin(x-a) + \int_a^x (f''(t) + f(t))\sin(x-t)dt.$$

A hiperbolikus eset

Legyen $n = 2$ és $\omega_1(x) := \cosh(x), \quad \omega_2(x) := \sinh(x)$. Ekkor

$$W_\omega(x) = \begin{vmatrix} \omega_1(x) & \omega_1'(x) \\ \omega_2(x) & \omega_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cosh(x) & \sinh(x) \\ \sinh(x) & \cosh(x) \end{vmatrix} = 1,$$

$$W_{f,\omega}(x) = \begin{vmatrix} f(x) & f'(x) & f''(x) \\ \cosh(x) & \sinh(x) & \cosh(x) \\ \sinh(x) & \cosh(x) & \sinh(x) \end{vmatrix} = f''(x) - f(x),$$

$$\begin{vmatrix} f(x) & f(a) & f'(a) \\ \omega_1(x) & \omega_1(a) & \omega_1'(a) \\ \omega_2(x) & \omega_2(a) & \omega_2'(a) \end{vmatrix} = f(x) - \Big(f(a)\cosh(x-a) + f'(a)\sinh(x-a)\Big),$$

$$\begin{vmatrix} \omega_1(x) & \omega_1(t) \\ \omega_2(x) & \omega_2(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cosh(x) & \cosh(t) \\ \sinh(x) & \sinh(t) \end{vmatrix} = -\sinh(x-t).$$

Ekkor a 3. tételből adódik, hogy

$$f(x) = f(a)\cosh(x-a) + f'(a)\sinh(x-a) + \int_a^x (f''(t) - f(t))\sinh(x-t)dt.$$

A hiperbolikus eset

Legyen $n = 2$ és $\omega_1(x) := \cosh(x), \quad \omega_2(x) := \sinh(x)$. Ekkor

$$W_\omega(x) = \begin{vmatrix} \omega_1(x) & \omega_1'(x) \\ \omega_2(x) & \omega_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cosh(x) & \sinh(x) \\ \sinh(x) & \cosh(x) \end{vmatrix} = 1,$$

$$W_{f,\omega}(x) = \begin{vmatrix} f(x) & f'(x) & f''(x) \\ \cosh(x) & \sinh(x) & \cosh(x) \\ \sinh(x) & \cosh(x) & \sinh(x) \end{vmatrix} = f''(x) - f(x),$$

$$\begin{vmatrix} f(x) & f(a) & f'(a) \\ \omega_1(x) & \omega_1(a) & \omega_1'(a) \\ \omega_2(x) & \omega_2(a) & \omega_2'(a) \end{vmatrix} = f(x) - \Big(f(a)\cosh(x-a) + f'(a)\sinh(x-a)\Big),$$

$$\begin{vmatrix} \omega_1(x) & \omega_1(t) \\ \omega_2(x) & \omega_2(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cosh(x) & \cosh(t) \\ \sinh(x) & \sinh(t) \end{vmatrix} = -\sinh(x-t).$$

Ekkor a 3. tételből adódik, hogy

$$f(x) = f(a)\cosh(x-a) + f'(a)\sinh(x-a) + \int_a^x (f''(t) - f(t))\sinh(x-t)\,dt.$$

A hiperbolikus eset

Legyen $n = 2$ és $\omega_1(x) := \cosh(x)$, $\omega_2(x) := \sinh(x)$. Ekkor

$$W_\omega(x) = \begin{vmatrix} \omega_1(x) & \omega_1'(x) \\ \omega_2(x) & \omega_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cosh(x) & \sinh(x) \\ \sinh(x) & \cosh(x) \end{vmatrix} = 1,$$

$$W_{f,\omega}(x) = \begin{vmatrix} f(x) & f'(x) & f''(x) \\ \cosh(x) & \sinh(x) & \cosh(x) \\ \sinh(x) & \cosh(x) & \sinh(x) \end{vmatrix} = f''(x) - f(x),$$

$$\begin{vmatrix} f(x) & f(a) & f'(a) \\ \omega_1(x) & \omega_1(a) & \omega_1'(a) \\ \omega_2(x) & \omega_2(a) & \omega_2'(a) \end{vmatrix} = f(x) - \Big(f(a)\cosh(x-a) + f'(a)\sinh(x-a)\Big),$$

$$\begin{vmatrix} \omega_1(x) & \omega_1(t) \\ \omega_2(x) & \omega_2(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cosh(x) & \cosh(t) \\ \sinh(x) & \sinh(t) \end{vmatrix} = -\sinh(x-t).$$

Ekkor a 3. tételből adódik, hogy

$$f(x) = f(a)\cosh(x-a) + f'(a)\sinh(x-a) + \int_a^x (f''(t) - f(t))\sinh(x-t)dt.$$

A hiperbolikus eset

Legyen $n = 2$ és $\omega_1(x) := \cosh(x)$, $\omega_2(x) := \sinh(x)$. Ekkor

$$W_\omega(x) = \begin{vmatrix} \omega_1(x) & \omega_1'(x) \\ \omega_2(x) & \omega_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cosh(x) & \sinh(x) \\ \sinh(x) & \cosh(x) \end{vmatrix} = 1,$$

$$W_{f,\omega}(x) = \begin{vmatrix} f(x) & f'(x) & f''(x) \\ \cosh(x) & \sinh(x) & \cosh(x) \\ \sinh(x) & \cosh(x) & \sinh(x) \end{vmatrix} = f''(x) - f(x),$$

$$\begin{vmatrix} f(x) & f(a) & f'(a) \\ \omega_1(x) & \omega_1(a) & \omega_1'(a) \\ \omega_2(x) & \omega_2(a) & \omega_2'(a) \end{vmatrix} = f(x) - \Big(f(a)\cosh(x-a) + f'(a)\sinh(x-a) \Big),$$

$$\begin{vmatrix} \omega_1(x) & \omega_1(t) \\ \omega_2(x) & \omega_2(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cosh(x) & \cosh(t) \\ \sinh(x) & \sinh(t) \end{vmatrix} = -\sinh(x-t).$$

Ekkor a 3. tételből adódik, hogy

$$f(x) = f(a)\cosh(x-a) + f'(a)\sinh(x-a) + \int_a^x (f''(t) - f(t))\sinh(x-t)\,dt.$$

A hiperbolikus eset

Legyen $n = 2$ és $\omega_1(x) := \cosh(x), \quad \omega_2(x) := \sinh(x)$. Ekkor

$$W_\omega(x) = \begin{vmatrix} \omega_1(x) & \omega_1'(x) \\ \omega_2(x) & \omega_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cosh(x) & \sinh(x) \\ \sinh(x) & \cosh(x) \end{vmatrix} = 1,$$

$$W_{f,\omega}(x) = \begin{vmatrix} f(x) & f'(x) & f''(x) \\ \cosh(x) & \sinh(x) & \cosh(x) \\ \sinh(x) & \cosh(x) & \sinh(x) \end{vmatrix} = f''(x) - f(x),$$

$$\begin{vmatrix} f(x) & f(a) & f'(a) \\ \omega_1(x) & \omega_1(a) & \omega_1'(a) \\ \omega_2(x) & \omega_2(a) & \omega_2'(a) \end{vmatrix} = f(x) - \Big(f(a)\cosh(x-a) + f'(a)\sinh(x-a)\Big),$$

$$\begin{vmatrix} \omega_1(x) & \omega_1(t) \\ \omega_2(x) & \omega_2(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cosh(x) & \cosh(t) \\ \sinh(x) & \sinh(t) \end{vmatrix} = -\sinh(x-t).$$

Ekkor a 3. tételből adódik, hogy

$$f(x) = f(a)\cosh(x-a) + f'(a)\sinh(x-a) + \int_a^x (f''(t) - f(t))\sinh(x-t)dt.$$

A hiperbolikus eset

Legyen $n = 2$ és $\omega_1(x) := \cosh(x)$, $\quad \omega_2(x) := \sinh(x)$. Ekkor

$$W_\omega(x) = \begin{vmatrix} \omega_1(x) & \omega_1'(x) \\ \omega_2(x) & \omega_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cosh(x) & \sinh(x) \\ \sinh(x) & \cosh(x) \end{vmatrix} = 1,$$

$$W_{f,\omega}(x) = \begin{vmatrix} f(x) & f'(x) & f''(x) \\ \cosh(x) & \sinh(x) & \cosh(x) \\ \sinh(x) & \cosh(x) & \sinh(x) \end{vmatrix} = f''(x) - f(x),$$

$$\begin{vmatrix} f(x) & f(a) & f'(a) \\ \omega_1(x) & \omega_1(a) & \omega_1'(a) \\ \omega_2(x) & \omega_2(a) & \omega_2'(a) \end{vmatrix} = f(x) - \Big(f(a)\cosh(x-a) + f'(a)\sinh(x-a)\Big),$$

$$\begin{vmatrix} \omega_1(x) & \omega_1(t) \\ \omega_2(x) & \omega_2(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cosh(x) & \cosh(t) \\ \sinh(x) & \sinh(t) \end{vmatrix} = -\sinh(x-t).$$

Ekkor a 3. tételből adódik, hogy

$$f(x) = f(a)\cosh(x-a) + f'(a)\sinh(x-a) + \int_a^x (f''(t) - f(t))\sinh(x-t)dt.$$

A trigonometrikus-hiperbolikus kevert eset

Minden 4-szer folytonosan differenciálható $f : I \to \mathbb{R}$ függvény és minden $a, x \in I$ esetén

$$\begin{aligned} f(x) = f(a)&\frac{\cosh(x-a)+\cos(x-a)}{2} \\ &+ f'(a)\frac{\sinh(x-a)+\sin(x-a)}{2} \\ &+ f''(a)\frac{\cosh(x-a)-\cos(x-a)}{2} \\ &+ f'''(a)\frac{\sinh(x-a)-\sin(x-a)}{2} \\ &+ \int_a^x (f''''(t)-f(t))\frac{\sinh(x-t)-\sin(x-t)}{2}\,dt. \end{aligned}$$

Egy hiányos polinomiális eset

Legyen $n = 2$ és $\omega_1(x) := x$, $\omega_2(x) := x^2$ $(x \in \mathbb{R}_+)$. Ekkor

$$W_\omega(x) = \begin{vmatrix} \omega_1(x) & \omega_1'(x) \\ \omega_2(x) & \omega_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 1 \\ x^2 & 2x \end{vmatrix} = x^2,$$

$$W_{f,\omega}(x) = \begin{vmatrix} f(x) & f'(x) & f''(x) \\ x & 1 & 0 \\ x^2 & 2x & 2 \end{vmatrix} = x^2 f''(x) - 2xf'(x) + 2f(x),$$

$$\begin{vmatrix} f(x) & f(a) & f'(a) \\ x & a & 1 \\ x^2 & a^2 & 2a \end{vmatrix} = a^2 f(x) - \Big(f(a)(2ax - x^2) + f'(a)(ax^2 - a^2 x)\Big),$$

$$\begin{vmatrix} \omega_1(x) & \omega_1(t) \\ \omega_2(x) & \omega_2(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & t \\ x^2 & t^2 \end{vmatrix} = xt^2 - x^2 t.$$

Ekkor a 3. tételből adódik, hogy minden $a, x > 0$ esetén

$$a^2 f(x) = f(a)(2ax - x^2) + f'(a)(ax^2 - a^2 x)$$
$$+ a^2 x \int_a^x \Big(t^2 f''(t) - 2tf'(t) + 2f(t)\Big) \frac{x - t}{t^3} dt.$$

Egy hiányos polinomiális eset

Legyen $n = 2$ és $\omega_1(x) := x$, $\omega_2(x) := x^2$ $(x \in \mathbb{R}_+)$. Ekkor

$$W_\omega(x) = \begin{vmatrix} \omega_1(x) & \omega_1'(x) \\ \omega_2(x) & \omega_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 1 \\ x^2 & 2x \end{vmatrix} = x^2,$$

$$W_{f,\omega}(x) = \begin{vmatrix} f(x) & f'(x) & f''(x) \\ x & 1 & 0 \\ x^2 & 2x & 2 \end{vmatrix} = x^2 f''(x) - 2xf'(x) + 2f(x),$$

$$\begin{vmatrix} f(x) & f(a) & f'(a) \\ x & a & 1 \\ x^2 & a^2 & 2a \end{vmatrix} = a^2 f(x) - \Big(f(a)(2ax - x^2) + f'(a)(ax^2 - a^2 x) \Big),$$

$$\begin{vmatrix} \omega_1(x) & \omega_1(t) \\ \omega_2(x) & \omega_2(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & t \\ x^2 & t^2 \end{vmatrix} = xt^2 - x^2 t.$$

Ekkor a 3. tételből adódik, hogy minden $a, x > 0$ esetén

$$a^2 f(x) = f(a)(2ax - x^2) + f'(a)(ax^2 - a^2 x) + a^2 x \int_a^x \Big(t^2 f''(t) - 2tf'(t) + 2f(t) \Big) \frac{x - t}{t^3} dt.$$

Egy hiányos polinomiális eset

Legyen $n = 2$ és $\omega_1(x) := x$, $\omega_2(x) := x^2$ ($x \in \mathbb{R}_+$). Ekkor

$$W_\omega(x) = \begin{vmatrix} \omega_1(x) & \omega_1'(x) \\ \omega_2(x) & \omega_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 1 \\ x^2 & 2x \end{vmatrix} = x^2,$$

$$W_{f,\omega}(x) = \begin{vmatrix} f(x) & f'(x) & f''(x) \\ x & 1 & 0 \\ x^2 & 2x & 2 \end{vmatrix} = x^2 f''(x) - 2xf'(x) + 2f(x),$$

$$\begin{vmatrix} f(x) & f(a) & f'(a) \\ x & a & 1 \\ x^2 & a^2 & 2a \end{vmatrix} = a^2 f(x) - \Big(f(a)(2ax - x^2) + f'(a)(ax^2 - a^2x) \Big),$$

$$\begin{vmatrix} \omega_1(x) & \omega_1(t) \\ \omega_2(x) & \omega_2(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & t \\ x^2 & t^2 \end{vmatrix} = xt^2 - x^2 t.$$

Ekkor a 3. tételből adódik, hogy minden $a, x > 0$ esetén

$$a^2 f(x) = f(a)(2ax - x^2) + f'(a)(ax^2 - a^2x)$$
$$+ a^2 x \int_a^x \Big(t^2 f''(t) - 2tf'(t) + 2f(t) \Big) \frac{x-t}{t^3} dt.$$

Egy hiányos polinomiális eset

Legyen $n = 2$ és $\omega_1(x) := x$, $\omega_2(x) := x^2$ $(x \in \mathbb{R}_+)$. Ekkor

$$W_\omega(x) = \begin{vmatrix} \omega_1(x) & \omega_1'(x) \\ \omega_2(x) & \omega_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 1 \\ x^2 & 2x \end{vmatrix} = x^2,$$

$$W_{f,\omega}(x) = \begin{vmatrix} f(x) & f'(x) & f''(x) \\ x & 1 & 0 \\ x^2 & 2x & 2 \end{vmatrix} = x^2 f''(x) - 2xf'(x) + 2f(x),$$

$$\begin{vmatrix} f(x) & f(a) & f'(a) \\ x & a & 1 \\ x^2 & a^2 & 2a \end{vmatrix} = a^2 f(x) - \Big(f(a)(2ax - x^2) + f'(a)(ax^2 - a^2 x) \Big),$$

$$\begin{vmatrix} \omega_1(x) & \omega_1(t) \\ \omega_2(x) & \omega_2(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & t \\ x^2 & t^2 \end{vmatrix} = xt^2 - x^2 t.$$

Ekkor a 3. tételből adódik, hogy minden $a, x > 0$ esetén

$$a^2 f(x) = f(a)(2ax - x^2) + f'(a)(ax^2 - a^2 x) + a^2 x \int_a^x \Big(t^2 f''(t) - 2tf'(t) + 2f(t) \Big) \frac{x - t}{t^3} dt.$$

Egy hiányos polinomiális eset

Legyen $n = 2$ és $\omega_1(x) := x$, $\omega_2(x) := x^2$ $(x \in \mathbb{R}_+)$. Ekkor

$$W_\omega(x) = \begin{vmatrix} \omega_1(x) & \omega_1'(x) \\ \omega_2(x) & \omega_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 1 \\ x^2 & 2x \end{vmatrix} = x^2,$$

$$W_{f,\omega}(x) = \begin{vmatrix} f(x) & f'(x) & f''(x) \\ x & 1 & 0 \\ x^2 & 2x & 2 \end{vmatrix} = x^2 f''(x) - 2xf'(x) + 2f(x),$$

$$\begin{vmatrix} f(x) & f(a) & f'(a) \\ x & a & 1 \\ x^2 & a^2 & 2a \end{vmatrix} = a^2 f(x) - \Big(f(a)(2ax - x^2) + f'(a)(ax^2 - a^2 x) \Big),$$

$$\begin{vmatrix} \omega_1(x) & \omega_1(t) \\ \omega_2(x) & \omega_2(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & t \\ x^2 & t^2 \end{vmatrix} = xt^2 - x^2 t.$$

Ekkor a 3. tételből adódik, hogy minden $a, x > 0$ esetén

$$a^2 f(x) = f(a)(2ax - x^2) + f'(a)(ax^2 - a^2 x) + a^2 x \int_a^x \Big(t^2 f''(t) - 2tf'(t) + 2f(t) \Big) \frac{x - t}{t^3} dt.$$

Egy hiányos polinomiális eset

Legyen $n = 2$ és $\omega_1(x) := x$, $\omega_2(x) := x^2$ $(x \in \mathbb{R}_+)$. Ekkor

$$W_\omega(x) = \begin{vmatrix} \omega_1(x) & \omega_1'(x) \\ \omega_2(x) & \omega_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 1 \\ x^2 & 2x \end{vmatrix} = x^2,$$

$$W_{f,\omega}(x) = \begin{vmatrix} f(x) & f'(x) & f''(x) \\ x & 1 & 0 \\ x^2 & 2x & 2 \end{vmatrix} = x^2 f''(x) - 2xf'(x) + 2f(x),$$

$$\begin{vmatrix} f(x) & f(a) & f'(a) \\ x & a & 1 \\ x^2 & a^2 & 2a \end{vmatrix} = a^2 f(x) - \Big(f(a)(2ax - x^2) + f'(a)(ax^2 - a^2 x)\Big),$$

$$\begin{vmatrix} \omega_1(x) & \omega_1(t) \\ \omega_2(x) & \omega_2(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & t \\ x^2 & t^2 \end{vmatrix} = xt^2 - x^2 t.$$

Ekkor a 3. tételből adódik, hogy minden $a, x > 0$ esetén

$$\begin{aligned} a^2 f(x) = f(a)(2ax - x^2) + f'(a)(ax^2 - a^2 x) \\ + a^2 x \int_a^x \Big(t^2 f''(t) - 2tf'(t) + 2f(t)\Big) \frac{x-t}{t^3} dt. \end{aligned}$$

Isten éltesse

- Schipp Ferencet 85.
- Simon Pétert 75.
- Szili Lászlót 70.
- Weisz Ferencet 60.

születésnapja alkalmából

és köszönöm a figyelmet!