

{m:i}

PTE TTK



PÉCSI TUDOMÁNYEGYETEM  
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR  
MATEMATIKAI ÉS  
INFORMATIKAI INTÉZET

**Pap Margit**

Pécsi Tudományegyetem

 MatInfo Pécs TTK

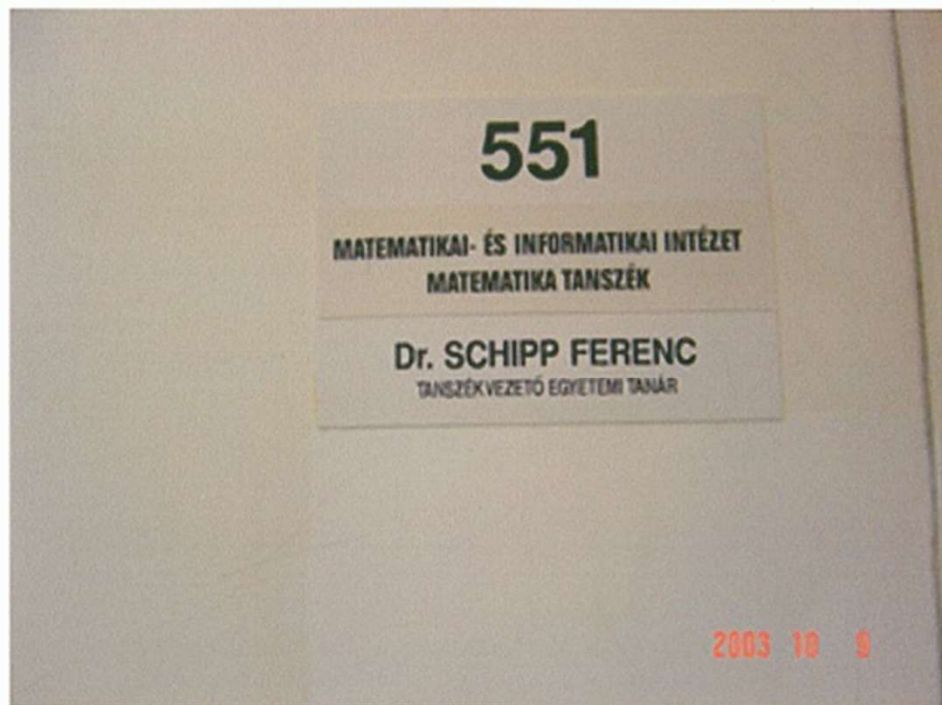
 <http://mii.ttk.pte.hu>

#matinfopécs #mii #algorithmustólazüzetig #ptettk #előttedajövőd

Pécs  
2024

# **ELTE IK Numerikus Analízis Tanszék - PTE TTK Matematikai és Informatikai Intézet - Prof. Dr. Schipp Ferenc**

- Prof. Dr. Schipp Ferenc 1993-tól: félállású egyetemi tanár a JPTE Matematika Tanszékén
- 1994-2004: tanszékvezető egyetemi tanár a JPTE Matematika Tanszékén
- 2004 után oktatás, kutatás



# Pécsi tevékenység

- Oktatás, oktatási anyagok fejlesztése
- Új szakok akkreditációja
- Tanszéképítés, utánpótlás nevelés
- Kutatás-Fokozatszerzés mentorálás

# Oktatás, oktatási anyagok fejlesztése

JANUS PANNONIUS TUDOMÁNYEGYETEM



Schipp Ferenc

ANALÍZIS I.

Sorozatok és sorok



JANUS PANNONIUS TUDOMÁNYEGYETEM

Schipp Ferenc

ANALÍZIS II.

Folytonosság, differenciálhatóság

# Új szakok akkreditációjának elindítása-Szakjaink jelenleg

Matematika és informatika tanárszak



Matematika BSc, Alkalmazott mat. MSc



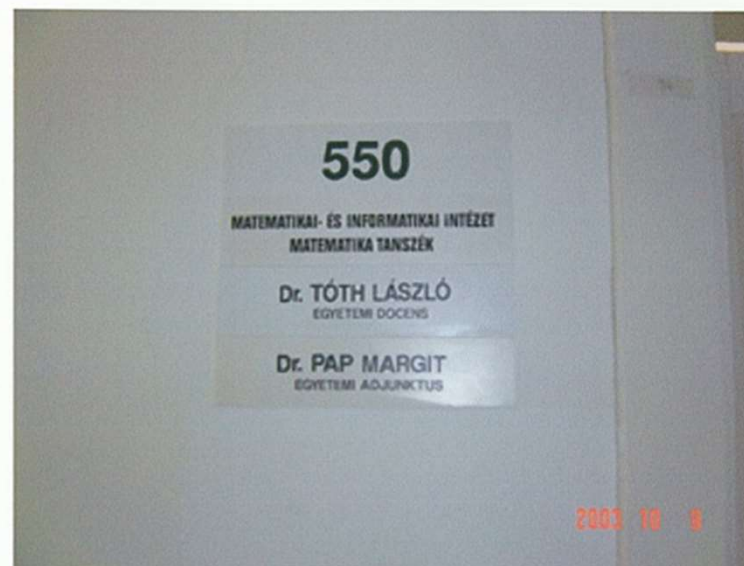
Programtervező informatikus BSc



Gazdaságinformatikus BSc, MSc



# Tanszéképítés, utánpótlás nevelés



# Mentorálás-fokozatszerzések

## PhD

- Eisner Tímea, Diadikus Cesaro és Copson operátorok(1998)
- Simon Ilona, Orthogonal systems on local fields (2013)
- Király Balázs, Szorzatrendszer-konstrukciók (2018)

## Habilitáció, MTA doktora

- Pap Margit (2006, 2022)





# Tehetséggondozás- Dr. Eisner Tímea

## TÖPRENGŐ Klub

MATEGO Közhasznú Alapítvány + PTE



# Tehetséggondozás



**Sztojkovics Dóra**

XXXIV. OTDK 2019

Tanulás- és Tanításmódszertani - Tudástechnikai  
Szekció



**Orbán Bene**

XXXV. OTDK 2022

Tanulás- és Tanításmódszertani -  
Tudástechnológiai Szekció



# MATHEMATICA PANNONICA

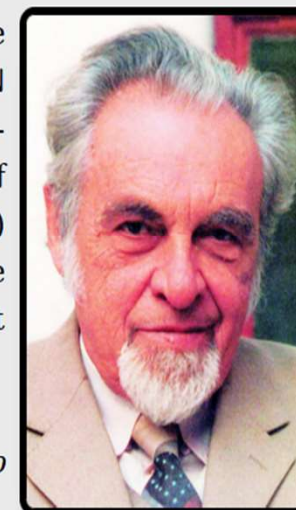
Founded in 1990 by  
I. Gy. Maurer (Hungary) & H. Sachs (Austria)

[EDITORS, ADVISORY BOARD](#) • [INSTRUCTIONS TO AUTHORS](#) • [CONTENTS](#)

## Aims and Scope

**M**athematica Pannonica is a peer-reviewed mathematical journal devoted to the publication of high quality research papers on pure and applied mathematics. The journal was started in 1990, and brings out two issues per annum. Mathematica Pannonica ISSN are: **0865-2090 (Print)** and **2786-0752 (Online)**. The idea of launching a high level international mathematical journal in Austrian-Hungarian cooperation stems from late professors I. Gy. Maurer (1927-2012, Hungary) and H. Sachs (1942-2013, Austria). As a result of their initiative the first volume of Mathematica Pannonica was published in 1990. One year later, in 1991, professor G. Tironi (Italy) joined the "Founding Fathers" and the journal has become a truly "Pannon" scientific journal (comprising the historical regions of the ancient Pannonia Inferior and Pannonia Superior). The aim of launching this journal was emphasized in the Editorial Preface of the first issue as reads:

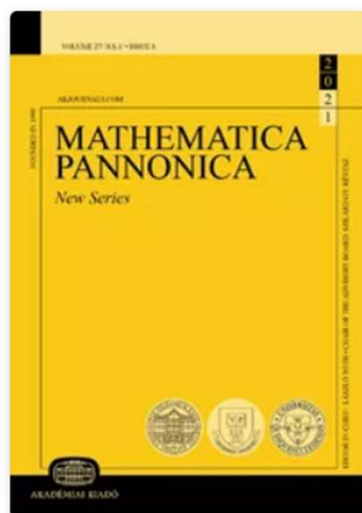
*"Our primary aim is to serve the mathematical community. At the same time it is not a secret that by organizing this journal we wish to contribute to the upgrading of the once flourishing network of cultural ties in the Central European Region."*



# Megújult lap-Dr. Tóth László főszerkesztő



[HOME](#) [BROWSE TITLES](#) [SUBJECTS](#) [SUBSCRIPTIONS](#) [AUTHORS](#) [REVIEWERS](#)



## Mathematica Pannonica

New Series



Mathematica Pannonica is a peer-reviewed mathematical journal devoted to the publication of high-quality research papers on pure and applied mathematics. The journal was started in 1990 and brings out two issues per annum.

## A Blaschke-csoport

Tekintsük az egységkörlelát és az egységkört:

$$\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}, \quad \mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}.$$

A lineáris függvények kompozíciója helyett tekintjük a  $\mathbb{B} := \mathbb{D} \times \mathbb{T}$  paraméter tartományban a

$$B_a(z) := \epsilon \frac{z - b}{1 - \bar{b}z} \quad (a = (b, \epsilon) \in \mathbb{B} := \mathbb{D} \times \mathbb{T}, z \in \mathbb{C}, \bar{b}z \neq 1)$$

Blaschke-függvények kompozíciója által generált csoportot, az ún. Blaschke-csoportot.

A Blaschke-csoport jelölése  $(\mathbb{B}, \circ)$ , ahol két elem között a

$$(B_{a_1} \circ B_{a_2})(z) := B_{(a_1 \circ a_2)}(z)$$
 generálja a műveletet.

A  $\mathbb{D}$ -n értelmezett pszeudo-hiperbolikus metrika kifejezhető a Blaschke-függvényekkel:

$$\rho(z_1, z_2) := \frac{|z_1 - z_2|}{|1 - z_1 \bar{z}_2|} = |B_{(z_2, 1)}(z_1)| \quad (z_1, z_2 \in \mathbb{D}).$$

## Blaschke-csoport reprezentációi

Legyen

$$(U_{a^{-1}}^m f)(z) := \left( e^{i\frac{1}{2}\psi} \frac{(1 - |b|^2)^{\frac{1}{2}}}{(1 - \bar{b}z)} \right)^m f \left( e^{i\psi} \frac{z - b}{1 - \bar{b}z} \right), (a = (b, e^{i\psi}) \in \mathbb{B}). \quad (3)$$

Ha  $m = 1$  és  $f \in H^2(\mathbb{T})$ , akkor (3) a Blaschke-csoportnak a  $H^2(\mathbb{T})$  **Hardy-térre vett reprezentációja.**

Ha  $m = \alpha + 2$  és  $f \in A_\alpha^2$ , a (3) a Blaschke-csoportnak az  $A_\alpha^2$  súlyozott **Bergman-térre reprezentációját** definiálja.

Tanulmányoztuk a Blaschke-csoport reprezentáció által indukált voice transzformáltakat,

## A reprezentáció mátrixelemeinek kapcsolata a Zernike-polinomokkal

**Zernike 1934:**  $Z_n^\ell(\rho, \theta) := \sqrt{2n + |\ell| + 1} R_{|\ell|+2n}^{|\ell|}(\rho) e^{i\ell\theta}$ ,  $\ell \in \mathbb{Z}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  
 $R_{|\ell|+2n}^{|\ell|}(\rho) = \rho^{|\ell|} P_n^{(0, |\ell|)}(2\rho^2 - 1)$ .

**Tétel [Pap, Schipp, 2008]**

Az  $U_a$  (5) reprezentáció  $\{\epsilon_n : n \in \mathbb{N}\}$  trigonometrikus bázis szerinti mátrix elemei kifejezhetők a Zernike-függvények segítségével:

$$v_{mn}(a^{-1}) = \langle \epsilon_n, U_{a^{-1}} \epsilon_m \rangle =$$

$$\frac{\sqrt{1-r^2}}{\sqrt{m+n+1}} e^{-i(m+1/2)\psi} (-1)^m Z_{\min\{n,m\}}^{|m-n|}(r, \varphi), \quad a = (re^{i\varphi}, e^{i\psi}).$$

## Zernike-függvényekre vonatkozó addíciós formula

Következmény [Pap, Schipp, 2008]

Zernike-függvényekre vonatkozó addíciós formula:

$$\frac{\sqrt{1-r^2}}{\sqrt{(n+m+1)(1-r_1^2)(1-r_2^2)}} e^{-i(m+1/2)\psi} Z_{\min\{m,n\}}^{|n-m|}(r, \varphi) =$$
$$\sum_k \frac{(-1)^k e^{-i(m+1/2)\psi_1} e^{-i(k+1/2)\psi_2}}{\sqrt{(m+k+1)(n+k+1)}} Z_{\min\{m,k\}}^{|k-m|}(r_1, \varphi_1) Z_{\min\{k,n\}}^{|n-k|}(r_2, \varphi_2),$$



## A Zernike-függvények diszkrét ortogonalitása

Tekintsük az ezeknek megfelelő **Cristoffel-számokat**:

$$\mathcal{A}_k^N := \int_{-1}^1 \ell_k^N(x) dx, \quad (1 \leq k \leq N).$$

A diszkrét ortogonalitás igazolásához a  $P_N$ ,  $N$ -edfokú Legendre-polinom gyökei segítségével vezessük be a következő számokat:

$$\rho_k^N := \sqrt{\frac{1 + \lambda_k^N}{2}}, \quad k = \overline{1, N}.$$

Tekintsük az egységkörlemben a következő polárkoordinátákkal adott ponthalmazt:

$$X := \left\{ z_{jk} := \left( \rho_k^N, \frac{2\pi j}{4N+1} \right), \quad k = \overline{1, N}, \quad j = \overline{0, 4N} \right\}. \quad (14)$$

## A Zernike-függvények diszkrét ortogonalitása

Az  $X$  ponthalmazon tekintjük a következő diszkrét integrált:

$$\int_X f(\rho, \phi) d\nu_N := \sum_{k=1}^N \sum_{j=0}^{4N} f\left(\rho_k^N, \frac{2\pi j}{4N+1}\right) \frac{\mathcal{A}_k^N}{2(4N+1)}. \quad (15)$$

Tétel [ Pap, Schipp, 2005 ]

A  $2N$ -nél kisebb fokszámú Zernike-polinomok diszkrét ortogonálisak a (15) által indukált diszkrét skalárszorzatra nézve, azaz

$$\int_X Z_n^m(\rho, \phi) \overline{Z_{n'}^{m'}(\rho, \phi)} d\nu_N = \delta_{nn'} \delta_{mm'},$$

if  $n + |m| < 2N - 1$ ,  $n' + |m'| < 2N - 1$ ,  $n, n' \in \mathbb{N}$ ,  $m, m' \in \mathbb{Z}$

# További közös eredmények

- Malmquist-Takenaka rendszerek diszkrét ortogonalitása és a diszkretizációs pontrendszerekre vonatkozó egyensúlyi feltételek igazolása. **Pap, Schipp 2001, 2015, Pap 2004, Eisner, Pap 2014**
- A kvaternió változójú reguláris Malmquist-Takenaka rendszer bevezetése és tulajdonságainak vizsgálata:  
**Pap M.**, Slice regular Malmquist-Takenaka system in the quaternionic Hardy spaces, *Anal. Math.* bf 44 (1) (2018), 99–114.
- A kvaterniók mátrix reprezentációját használva bevezettük a Blaschke-csoportot a kvaterniók halmazában. Mivel a kvaterniók szorzása nem kommutatív, az eredmények kiterjesztése nem triviális.  
**Pap M., Schipp F.**, Quaternionic Blaschke Group, *Mathematics* 7 (1) (2018), Paper: 33.

Schipp Ferenc a PTE Professor Emeritusa 2017



A Pécsi Tudományegyetem 2017. március 16-án tartotta díszdoktoravató ünnepi szenátusi ülését, amelyen a honoris causa doktori címet vehetett át Prof. Dr. Schipp Ferenc

[https://adminisztracio.pte.hu/disdoktorok/dr\\_schipp\\_ferenc](https://adminisztracio.pte.hu/disdoktorok/dr_schipp_ferenc)

2020. október 1-ei Szenátusi ülésen egyhangúlag támogatta Prof. Schipp Ferenc nyugalmazott egyetemi tanár számára „*Professor Emeritus*” cím viselését.

---

$\in \mathbb{R}$ )

$(c_k, k \in \mathbb{Z}) \in \ell^2$ )

$\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k x$

$= \sum c_k \hat{\varphi}$

$\int_{\mathbb{R}} f(x) dx =$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \epsilon_k \epsilon_{-k} |\hat{\varphi}|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\epsilon_k \epsilon_{-k}}_{1\text{-period}} |\hat{\varphi}|^2 dx = \int_0^1 \epsilon_k \epsilon_{-k} |\hat{\varphi}|^2 dx = \begin{cases} 0 & (k \neq 0) \\ 1 & (k=0) \end{cases} \quad ? \quad X$$

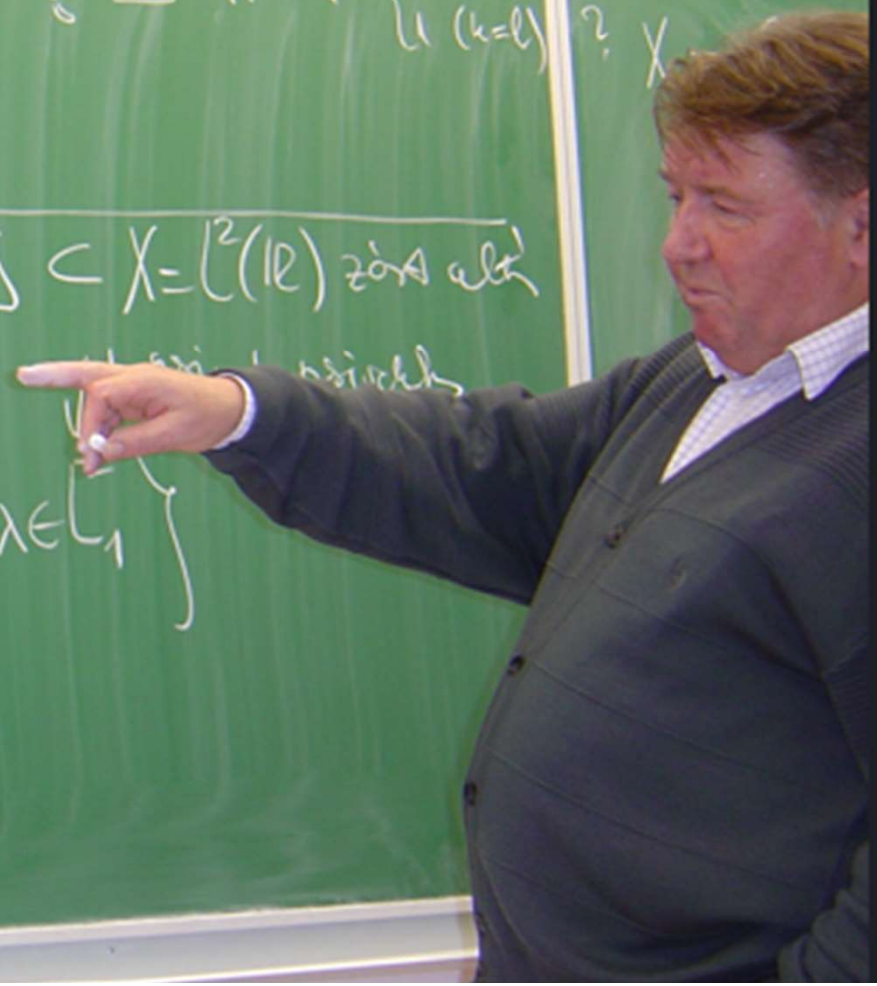
$$\epsilon_k \text{ telys} \Rightarrow |\hat{\varphi}|^2 = c_{00} A = 1$$

$$X_{\hat{\varphi}} := \left\{ \sum_k c_k \varphi_k : (c_k, k \in \mathbb{Z}) \in \ell^2 \right\} \subset X = L^2(\mathbb{R}) \text{ zóna alk}$$

jellemzese

$$\hat{X}_{\hat{\varphi}} = \{ \hat{f} : f \in X_{\hat{\varphi}} \} = \{ \lambda \hat{\varphi} : \lambda \in \ell_1 \}$$

$$f = \sum c_k \varphi_k \Rightarrow \hat{f} = \underbrace{\left( \sum c_k \epsilon_k \right)}_{\lambda} \hat{\varphi}$$





# Csapatépítés- Balatonszemes





**Köszönöm a figyelmet!**